SESSION 2002

Concours : EXTERNE
Section : Mathématiques

DEUXIEME EPREUVE ECRITE D'ADMISSIBILITE

Deuxième composition

(Coefficient 2,5 : - Durée : 5 heures)

L'usage de la calculatrice est autorisé.

On définit la suite des polynômes $(H_k)_{k\in\mathbb{N}}$ par: $H_0(X) = 1$ et pour tout entier naturel k ,

$$H_k(X) = \frac{X(X-1).....(X-k+1)}{k!}$$

Le but du problème est d'étudier quelques propriétés de ces polynômes et des séries du type $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n H_n(x)$ où x est une variable réelle et $(a_n)_{n\geq 0}$ une suite réelle, et de montrer une application.

$\mathbb{R}[X]$ désigne l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels .

PARTIE I

I 1. a) Montrer que pour tout entier relatif x, et pour tout entier naturel k, $H_k(x)$ est aussi un entier relatif . (on pourra distinguer les cas $x \geq k$, $0 \leq x \leq k-1$ et $x < 0$).

b) Calculer $H_k(k)$, $H_k(-1)$ et $H_k'(0)$, pour tout entier naturel k.

c) Montrer que : $\forall\, k \geq 1 \quad k\, H_k(X) = (X-k+1)\, H_{k-1}(X)$

I 2. On considère l'application Δ : $\mathbb{R}[X] \rightarrow \mathbb{R}[X]$

$P \mapsto P(X+1) - P(X)$

a) Justifier que Δ est linéaire et déterminer son noyau. Comparer $(\Delta P)'$ et $\Delta(P')$.

b) Prouver, pour tout entier naturel n non nul : $\Delta(H_n) = H_{n-1}$

c) Démontrer que, pour tout polynôme P de degré inférieur ou égal à n , n entier naturel :

$$P = \sum_{k=0}^{n} \Delta^k(P)(0) H_k$$

(Δ^k est défini par $\Delta^0(P) = P$ et $\Delta^k = \Delta \circ \Delta^{k-1}$, pour tout entier k non nul)

d) Établir, pour tout entier naturel k supérieur ou égal à 1, la formule :

$$H_k' = \sum_{i=0}^{k-1} \frac{(-1)^{k-1-i}}{k-i} H_i$$

I 3. Soient n un entier naturel et P un polynôme à coefficients réels de degré n.

Montrer que les trois conditions suivantes sont équivalentes:

i) Pour tout entier relatif x, $P(x)$ est un entier relatif.

ii) Il existe $n+1$ entiers relatifs consécutifs $x_0, x_1, \ldots\ldots, x_n$ tels que $P(x_0), P(x_1), \ldots, P(x_n)$ soient des entiers relatifs.

iii) Il existe des entiers relatifs $a_0, a_1, \ldots\ldots, a_n$ tels que: $P(X) = a_0 + a_1 H_1(X) + \ldots + a_n H_n(X)$

PARTIE II

Dans cette partie f désigne une fonction définie sur $[d,+\infty[$, avec $d \leq 0$, à valeurs dans $\mathbb{R}$.

II 1.Montrer que l'on peut définir par récurrence une suite de réels $(a_n)_{n\geq 0}$ de la façon suivante: on pose $a_0 = f(0)$ et $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}$ étant supposés construits, on définit a_n comme étant l'unique réel tel que la fonction $x \to f(x) - \sum_{k=0}^{n} a_k H_k(x)$ s'annule au point n.

La suite $(a_n)_{n\geq 0}$ ainsi définie sera dite <u>suite associée</u> à la fonction f.

II 2. Montrer que, pour tout entier naturel n, la fonction $x \to f(x) - \sum_{k=0}^{n} a_k H_k(x)$ s'annule lorsque x appartient à l'ensemble $\{0, 1, \ldots\ldots, n\}$.

II 3. Soit b un réel strictement positif; montrer que la suite associée à la fonction $x \to b^x$ est la suite définie par $a_0 = 1$ et $a_n = (b-1)^n$ pour tout entier naturel n strictement positif.

II 4. On suppose dans cette question que f est de classe C^∞ sur $[d,+\infty[$.
Soient x un réel supérieur ou égal à d et n un entier naturel quelconque.
On se propose de montrer qu'il existe un réel positif θ , dépendant de x et de n et tel que:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k H_k(x) + H_{n+1}(x) f^{(n+1)}(\theta)$$

a) Montrer l'existence d'un tel réel lorsque x est élément de l'ensemble $\{0, 1, .., n\}$.

b) On suppose désormais que x n'est pas élément de l'ensemble $\{0, 1, .., n\}$.

Prouver que l'on peut déterminer un réel A tel que la fonction $t \to f(t) - \sum_{k=0}^{n} a_k H_k(t) - A H_{n+1}(t)$ s'annule lorsque t appartient à l'ensemble $\{0, 1, ..., n, x\}$.
Conclure.

PARTIE III

III 1. Soit x un réel fixé non égal à un entier naturel.

On considère la suite $(t_n)_{n\geq 1}$ définie par: $t_n = n^{\rho} |H_n(x)|$ où ρ désigne un nombre réel.

a) Étudier, selon les valeurs de ρ, la nature de la série de terme général $u_n = \ln(t_{n+1}) - \ln(t_n)$.

b) Que peut-on conclure pour la suite $(t_n)_{n\geq 0}$ si la série Σu_n converge ? Montrer qu'il existe un réel strictement positif dépendant de x, noté $K(x)$, tel que l'on ait: $|H_n(x)| \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{K(x)}{n^{x+1}}$

(On ne cherchera pas à calculer $K(x)$)

III 2. Soit x_0 un réel **non entier** et b un entier vérifiant : $b > |x_0|$

a) Soit x un réel appartenant à $]x_0, b]$. On pose : $\lambda_n(x) = \frac{H_n(x)}{H_n(x_0)}$, pour $n \geq b$
Établir que la suite $(\lambda_n(x))_{n\geq b}$ est monotone et converge vers 0.
(On pourra étudier la nature de la série de terme général $\ln(|\lambda_{n+1}(x)|) - \ln(|\lambda_n(x)|)$).

b) En déduire l'existence d'une constante Λ telle que :
$\forall x \in [x_0, b], \forall n \geq b \quad |H_n(x)| \leq \Lambda |H_n(x_0)|$

c) Montrer que, si la série $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n H_n(x_0)$ converge absolument, alors la série $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n H_n(x)$ converge normalement sur tout compact de $[x_0, +\infty[$.

PARTIE IV

On pose : $\varphi(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} H_n(x)$ et $\psi(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n H_n(x)$

IV 1.a) Justifier qu'il y a convergence absolue de la série définissant φ si et seulement si x est réel positif ou nul.

b) Déterminer l'ensemble de définition de φ.

c) Démontrer que : $\forall x > -1 \quad \varphi(x) = 2^x$

(On pourra appliquer II 3. et se servir de II 4. pour déterminer le signe de $2^x - \sum_{k=0}^{n} H_k(x)$)

IV 2. On admet le théorème (T) suivant :

> Soit une série numérique convergente $\sum_{n=0}^{+\infty} r_n$ et une suite $(V_n)_{n\geq 0}$ d'applications d'un intervalle I dans $\mathbb{R}$,
>
> telles que : * $\forall x \in I \quad (V_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante
>
> * $\exists M > 0, \forall x \in I, \forall n \in \mathbb{N} \quad |V_n(x)| \leq M$
>
> Alors la série de fonctions $\sum_{n=0}^{+\infty} r_n V_n(x)$ converge uniformément sur I.

On pose : $\forall x \in [0, \frac{1}{2}], \forall n \geq 1, \ \lambda_n(x) = \dfrac{H_n(x)}{H_n(-\frac{1}{2})}$ (notations du III 2.)

Déterminer le signe de $\lambda_n(x)$ et démontrer, à l'aide de (T), que $\sum_{n=0}^{+\infty} H_n(x)$ converge uniformément sur $[0, \frac{1}{2}]$. Y a-t-il convergence uniforme de la série de fonction $\sum_{n=0}^{+\infty} H_n(x)$ sur tout compact de $\mathbb{R}^+$?

IV 3. a) Montrer que la série $\sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k H_k(x)$ est convergente si et seulement si x appartient à $\mathbb{R}^+$.

b) Montrer que pour tout réel x et tout entier n strictement positif: $\sum_{k=0}^{n} (-1)^k H_k(x) = (-1)^n H_n(x-1)$

c) En déduire que, pour tout $x > 0$: $\psi(x) = 0$. Que vaut $\psi(0)$?

d) Y a-t-il convergence uniforme de la série $\sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k H_k(x)$ sur tout compact de $\mathbb{R}^+$?

PARTIE V

On considère la fonction p définie par : $p(x) = \dfrac{x}{\ln(1+x)}$

V 1. a) Déterminer l'ensemble de définition Dp de p et prouver qu'elle est prolongeable par continuité en deux réels ; on notera aussi p la fonction prolongée, qui sera définie sur $[-1, +\infty[$

b) p est-elle dérivable en 0 ? est-elle dérivable en -1 ?

c) Déterminer les variations de p.

Dans la suite , on admet que la fonction p possède un développement en série entière au point 0 de rayon R strictement positif , que l'on écrira sous la forme : $\forall x \in]-R,R[\quad p(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \alpha_k x^k$

V 2. a) Donner un majorant de R.

b) Démontrer que la suite $(\alpha_k)_{k\in N}$ est définie par :

$\alpha_0 = 1$ et pour tout k entier non nul : $\sum_{i=0}^{k} \dfrac{(-1)^{k-i}}{k+1-i}\alpha_i = 0$. Calculer α_1 et α_2.

c) Justifier la relation : $\forall k \geq 2 \quad \alpha_k = \sum_{i=0}^{k-1}(-1)^{k-i}\alpha_i\left(\dfrac{1}{k-i} - \dfrac{1}{k+1-i}\right)$

En déduire que la suite (α_n) est bornée et conclure sur la valeur de R.

V 3. a) Établir la relation , valable pour tout entier naturel k : $H_k = \sum_{i=1}^{k+1} \alpha_{k+1-i} H_i'$

b) En utilisant la partie IV, démontrer alors que :

$$\forall x \geq 0 \quad \frac{1}{\ln(2)}\left[2^x - 1\right] = \sum_{k\geq 0}\left(\sum_{i=1}^{k+1}\alpha_{k+1-i}H_i(x)\right)$$

c) Justifier l'échange des Σ dans la formule précédente ; montrer que la série $\sum_{k=0}^{+\infty}\alpha_k$ est convergente et donner la somme.

d) A l'aide de V 3. a) , montrer que, pour tout entier k non nul :

$$\sum_{j=0}^{k}(-1)^j\alpha_j = (-1)^{k+1}\int_0^{-1} H_k(t)dt = \int_0^1 \frac{u(u+1)..(u+k-1)}{k!}du$$

En déduire que la série $\sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k\alpha_k$ converge, de somme nulle.